

Classe 5B – Test di matematica – 8 ottobre 2002

Argomento del test: Introduzione al calcolo differenziale - Durata della prova: 40 minuti

Calcolare la derivata delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{x + \sin x}$ Si ha $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x + \sin x}}(1 + \cos x)$

2. $f(x) = \sin(e^x)$ Si ha $f'(x) = \cos(e^x) \cdot e^x$

3. $f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - 2}$ Si ha $f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2-2) - (x^2+x)2x}{(x^2-2)^2}$

4. $f(x) = xe^{x^2}$ Si ha $f'(x) = e^{x^2} + x(e^{x^2})' = e^{x^2} + xe^{x^2} 2x = e^{x^2} + 2x^2e^{x^2}$

5. $f(x) = \ln(\sin x + \cos x)$ Si ha $f'(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}(\cos x - \sin x)$

6. Dimostrare che se due funzioni sono derivabili anche la somma è derivabile e che $(f+g)' = f' + g'$.

Si ha: $\lim_{x \rightarrow c} \frac{(f(x) + g(x)) - (f(c) + g(c))}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \left(\frac{f(x) - f(c)}{x - c} + \frac{g(x) - g(c)}{x - c} \right) = f'(c) + g'(c)$

7. Dimostrare che se una funzione è derivabile in un punto è anche continua nel punto.

Si ha: $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} \left(f(c) + \frac{f(x) - f(c)}{x - c} (x - c) \right) = f(c) + f'(c) \cdot 0 = f(c)$

8. Portare un esempio di due funzioni non derivabili, la cui somma è derivabile (le due funzioni non possono essere una l'opposto dell'altra).

Basta considerare le funzioni $\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ e $\cos^2\left(\frac{1}{x}\right)$, prolungate nell'origine a due qualunque valori che diano come somma 1.