Classe 5B – Compito di matematica – 12 ottobre 2002

Argomento del test: Introduzione al calcolo differenziale

a. Si consideri la funzione $f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$.

1. Se ne determini il dominio.

-1 ≤ x ≤ 1

2. Si calcoli $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Si ha $\lim_{x\to+\infty}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} = 0$

3. Si calcoli $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

-∞

4. Si risolva la disequazione $f(x) > 0$

Si ha $x - \sqrt{x^2-1} > 0 \Rightarrow x > \sqrt{x^2-1} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 > x^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow x \geq 1$*, tenendo anche conto del dominio.*

5. Si calcoli $f'(x)$

Si ha $f'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

6. Si calcoli $\lim_{x\to 1^+} f'(x)$

Si ha $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = -\infty$

7. Si calcoli $\lim_{x\to -1^-} f'(x)$

$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = +\infty$

8. Si risolva la disequazione $f'(x) > 0$

Scritta la derivata nella forma $f'(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}$*, si conclude subito che ha segno contrario alla funzione.*

b. Si calcoli la derivata delle seguenti funzioni:

9. $f(x) = \dfrac{x + \sin x^2}{e^x}$

Si ha $f'(x) = \dfrac{\left(1 + 2x\cos(x^2)\right)e^x - \left(x + \sin x^2\right)e^x}{e^{2x}}$

10. $f(x) = (x+1)^2$ (sviluppando il quadrato e senza sviluppare il quadrato).

Si ha $f'(x) = 2x + 2$*, se si sviluppa il quadrato,* $f'(x) = 2(x-1)\cdot 1$ *se non si sviluppa il quadrato.*